LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Fogelberg

$39999999\cdots 95 : 23 = 173913043478260869565$

23
169
161
89
69
209
207
29
23
69
69
99
92
79
69
109
92
179
161
189
184
59
46
139
138
199
184
159
138
219
207
129
115
149
138
115
115
0

Oktoberproblemet:

Vilket är det minsta positiva heltal, utskrivet i tiotalssystemet, som har egenskapen att om man flyttar första siffran och sätter den sist, så får man ett nytt tal som är exakt 20% mindre än det ursprungliga talet?

Lösning:

Kalla det ursprungliga talet x. Vi kan skriva x som

$$x = a \cdot 10^n + b$$

där $1 \leq a \leq 9$ och $b > 0$. Vi skriver talet så här för att ha kontroll över första siffran a. Tag t.ex. 4572. Vi kan skriva det som $4572 = 4 \cdot 10^3 + 572$.

Det nya talet som vi kallar y får formen

$$y = 10 \cdot b + a$$

I vårt exempel får vi $10 \cdot 572 + 4 = 5720 + 4 = 5724$.

Vi vet att det nya talet är exakt 80% av det ursprungliga talet och detta ger ekvationen:

$$y = 0,8x \quad \Leftrightarrow \quad 5y = 4x \quad \Leftrightarrow \quad 50b + 5a = 4a \cdot 10^n + 4b$$

$$\Leftrightarrow \quad 46b = 4a \cdot 10^n - 5a \quad \Leftrightarrow \quad 46b = a(4 \cdot 10^n - 5) \quad \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{a(4 \cdot 10^n - 5)}{46} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{a(4 \cdot 10^n - 5)}{2 \cdot 23}$$

Eftersom b är ett heltal måste täljaren $a(4 \cdot 10^n - 5)$ vara delbar med nämnaren $2 \cdot 23$. Men faktorn $4 \cdot 10^n - 5$ är ett udda tal och kan inte vara delbar med 2. Således gäller att om det finns en lösning så måste faktorn $4 \cdot 10^n - 5$ vara delbar med 23. Talet a måste vara delbart med 2 och eftersom a är den första siffran i det sökta talet så väljer vi $a = 2$ som ger det minsta talet. Notera att faktorn $4 \cdot 10^n - 5$ är ett tal på formen $3999\cdots 95$ och att $23 \cdot 5 = 115$, vilket betyder att när vi dividerar 399... med 23 plockar vi ner 9:or ända tills vi får resten 11. Då vet vi att divisionen går jämnt ut om 5:an tas med. Man kan i allmänhet vid division inte vara säker på att given rest dyker upp.

I figuren som omger lösningen är divisionen utförd. Denna ger värdet på b och det ursprungliga talet är således detta tal med siffran 2 längst fram.

Det minsta talet med den önskade egenskapen är: **2173913043478260869565**