

OKTOBERPROBLEMET - 2001

Problem:

1. Hur skriver man 22 med (-3) som bas? Man får endast använda siffrorna 0, 1 eller 2.
2. Hur liten kan omkretsen i en triangel vara om en sida är 5 centimeter och triangelns area är 15 kvadratcentimeter?
3. Hur många femsiffriga tal finns det som innehåller minst en av siffrorna 3, 5 eller 7? Ett femsiffrigt tal kan inte börja med noll!

Lösning:

1. Talet 22 skrivs i basen (-3) på följande sätt:

$$22 = a_4(-3)^4 + a_3(-3)^3 + a_2(-3)^2 + a_1(-3)^1 + a_0(-3)^0, \text{ där } a_k = 0, 1 \text{ eller } 2.$$

En smula eftertanke tvingar fram $a_4 = 1, a_3 = 2, a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = 1$ dvs :

$$22_{(10)} = 1 \cdot (-3)^4 + 2 \cdot (-3)^3 + 0 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3)^1 + 1 \cdot (-3)^0 = 12021_{(-3)}$$

$$(1 \cdot 81 + 2 \cdot (-27) + 0 \cdot 9 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = 81 - 54 - 6 + 1 = 22)$$

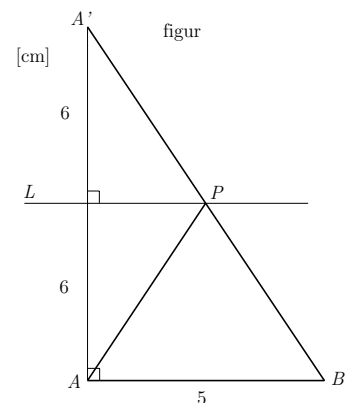
Svar: $22_{(10)} = 12021_{(-3)}$

2. Beteckningar se figur. Längden av en sträcka CD tecknas $|CD|$. Basen i triangeln är sträckan AB och vi söker en punkt P på linjen L som markerar var triangelns toppunkt måste ligga. Linjen L är parallell med basen AB och avståndet mellan dessa är 6 cm, eftersom arean är given till 15 cm. Låt A' vara spegelbild till punkten A i linjen L och drag sträckan $A'B$. Denna skär L i P . Då är $|AP| = |A'P|$ och vi får $|AP| + |PB| = |A'P| + |PB| = |A'B|$ som ger den kortaste vägen från A till B via L eftersom sträckan $A'B$ är en rät linje.

Vi har $|AB| = 5$ cm och Pythagoras sats ger då

$$|A'B|^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow |A'B| = 13.$$

Svar: Den minsta omkretsen är $5 + 13 = 18$ cm.



3. Det finns $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90\,000$ femsiffriga tal eftersom första siffran kan väljas på 9 sätt medan de övriga fyra kan vardera väljas på 10 sätt.

På motsvarande sätt sluter vi oss till att det finns $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 6 \cdot 7^4 = 14\,406$ femsiffriga tal som inte innehåller någon av siffrorna 3, 5, eller 7.

Alltså finns det $90\,000 - 14\,406 = 75\,594$ femsiffriga tal som innehåller minst en av siffrorna 3, 5, eller 7.

Svar: 75 594